FABER-CASTELL

A.W.Faber-Castell · Stein bei Nürnberg, Germany

FABER-CASTELL

Sonderdruck 71

Rechenstab und Mengenlehre

Rechenstab-Brief

Berichte und Anregungen für das Stabrechnen

Hinweis:

Der Castell-Rechenstab-Brief wird kostenlos an Interessenten verschickt. Weitere Druckschriften können angefordert werden.

Rechenstab und Mengenlehre

von

Heinz Kiesewetter, Studienrat

Ute Zinner, Studienrätin

Die Mengenlehre mit ihren grundlegenden Begriffsbildungen ist als Fundament der modernen Mathematik, auf dem sich alle Teilgebiete aufbauen lassen, anerkannt. In die Schulen findet die Mengenlehre erst in jüngster Zeit Eingang. Der gesellschaftliche Fortschritt verlangt aber einen dem modernen Stand von Wissenschaft und Technik angepaßten Mathematikunterricht. Dabei kommt der Mengenlehre eine besondere Bedeutung zu; denn sie gestattet die erforderliche stärkere Herausarbeitung des mathematisch Wesentlichen und die Schaffung eines ausbaufähigen Fundaments, das von den Schülern sicher beherrscht wird. Dabei soll die Mengenlehre im Mathematikunterricht weniger als eigener Unterrichtsgegenstand, sondern vielmehr als Prinzip einen wichtigen Platz einnehmen.

Der „Startschuß" für den Aufbau der mathematischen Bildung vom Kindergarten bis zum Abitur auf der Basis der Mengenlehre wurde durch den Beschluß der Kultusministerkonferenz vom 3. Oktober 1968 „Empfehlungen und Richtlinien zur Modernisierung des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen" gegeben. In den „Richtlinien und Rahmenplänen" taucht im 1. Themenkreis für die Klassen 7 und 8 ausdrücklich „Gebrauch des Rechenstabes" auf.

Beide Forderungen — grundlegende Verwendung moderner Bezeichnungen und Denkweisen auf der einen Seite, der Rechenstab als modernes und praktisches Hilfsmittel auf der anderen — lassen sich sehr gut vereinen. Wir möchten auf den folgenden Seiten zeigen, daß man die Begriffsbildungen und Bezeichnungsweisen der Mengenlehre im Rechenstabunterricht verwenden kann. Andererseits bietet sich der Rechenstab als Hilfsmittel zur Veranschaulichung und Verdeutlichung vieler Überlegungen im Unterricht geradezu an. Doch gilt auch hier, daß das Kapitel „Rechenstab" — von der Einführung in die Handhabung abgesehen — nicht eine gesonderte Unterrichtseinheit bilden sollte; fruchtbar wird der Rechenstab als Hilfsmittel erst, wenn man ihn bei jeder Gelegenheit in den Unterrichtsgang einbaut.

Die nachfolgenden Überlegungen sollen Hinweise und Anregungen sein. Sie wenden sich an einen großen Leserkreis und möchten Kollegen aller Schulgattungen Anstöße zu eigenen Gedanken geben. Der Rechenstab ist für Hauptschule, Realschule und Gymnasium in gleicher Weise verbindlich vorgeschrieben; unterschiedlich ist aber der Umfang und manchmal auch die Art von Einführung und Anwendung. Wir möchten für alle drei Schulgattungen Anregungen geben. Vielleicht hätte mancher Leser die eine oder andere Darstellung etwas ausführlicher gewünscht oder er vermißt methodisch-didaktische Anregungen; diese Leser müssen wir auf unsere umfangreichere Darstellung verweisen. Die Kollegen werden sich naturgemäß das aus unserer kleinen Schrift herausgreifen, was sie für ihren Unterricht gebrauchen können. Dabei werden sie vielfach ergänzende oder abweichende Gedanken haben. Wir würden uns freuen, wenn uns recht viele Kollegen ihre Meinung, ihre Anregungen und ihre Kritik schreiben würden.

Heinz Kiesewetter, Ute Zinner

Symbole der Mengenlehre

Die Symbole der Mengenlehre sind noch nicht genormt. Am häufigsten werden zur Zeit folgende Bezeichnungen verwendet:

A, B, . . . , M_1, M_2, . . .	Menge A, Menge B, . . . , Menge M-eins, Menge M-zwei, . .
a, b, usw.	Element a, Element b usw.
$=$	gleich
$\neq$	nicht gleich
$>$	größer als
$<$	kleiner als
$\geqq$	größer oder gleich
$\leqq$	kleiner oder gleich
$=_{\text{Def}}$	ist definiert als
$\{a, b\}$	Menge mit den Elementen a und b
$\{\}$ bzw. $\emptyset$	leere Menge
$\{x \mid x \ldots\}$	Menge aller x, für die gilt . . .
$\in$	ist Element von
$\notin$	ist nicht Element von
$\ni$	enthält Element
$\not\ni$	enthält nicht Element
$\subset$	ist Teilmenge von
$\not\subset$	ist nicht Teilmenge von
$\supset$	umschließt Teilmenge
$\not\supset$	umschließt nicht Teilmenge
$\Longleftrightarrow$	wenn, dann . . . ; dann und nur dann, wenn . . .
$\Longrightarrow$	zieht nach sich; aus . . . folgt
$\cap$	geschnitten mit
$\cup$	vereinigt mit
$A \setminus B$	Differenz zweier Mengen
$\lvert a \rvert$	a absolut; absoluter Betrag von a
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
A'	Ergänzungsmenge zur Menge A
$\parallel$	parallel
$\nparallel$	nicht parallel
richt G	Menge der Geraden, die zur Geraden G parallel sind
$\mathbb{P}(M)$	Potenzmenge von M, Menge der Teilmengen der Menge M
$A \times B$	(kartesisches) Produkt zweier Mengen
R^{-1}	reziproke Relation
$a \mid b$	a ist Teiler von b
$b \mid^{-1} a$	b ist teilbar durch a
$a \nmid b$	a ist nicht Teiler von b
$b \nmid^{-1} a$	b ist nicht teilbar durch a

[a, b]	abgeschlossenes Intervall mit den Endpunkten a und b einschließlich
]a, b[	offenes Intervall mit den Endpunkten a und b ausschließlich
[a, b[	halboffenes Intervall mit Endpunkt a einschließlich und Endpunkt b ausschließlich
]a, b]	halboffenes Intervall mit Endpunkt a ausschließlich und Endpunkt b einschließlich

Grundbegriffe der Mengenlehre

Mengen werden im allgemeinen mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet. Diese Bezeichnungsweise stimmt genau mit der auf Rechenstäben üblichen Bezeichnungsweise der Skalen überein. Die Skalen werden ebenfalls durch große lateinische Buchstaben bezeichnet, die jeweils am Beginn der einzelnen Leitern stehen. **Die Skalen A, B, C und D sind auf den meisten Rechenstäben zu finden.** Dazu kommen noch mindestens die häufig gebrauchten Skalen CF, DF und CI.

Alle diese Skalen lassen sich ohne Mühe als Bilder von Mengen deuten. Die Angabe von Mengen ist auf mehrfache Weise möglich. Man kann Mengen durch Aufzählung ihrer Elemente definieren oder durch Angabe besonderer, allen Elementen gemeinsamer Eigenschaften. In beiden Fällen werden die Mengen in Akkoladen — geschweiften Klammern — geschrieben. Daneben findet man häufig die graphische Darstellung in Form von Venn-Diagrammen. **Jede Rechenstabskala gestattet die Deutung als „entartetes" Venn-Diagramm: es wird zur Strecke, bei der die Elemente hintereinander angeordnet sind.**

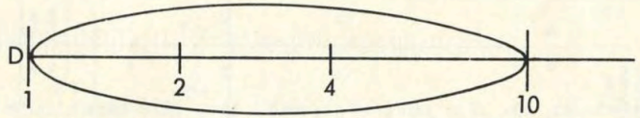


Abb. 1

Sehr leicht sind auch die Begriffe „Element von" ($\in$) oder „nicht Element von" ($\notin$) am Rechenstab zu deuten. Bei der Erklärung der Skalen wird ja schon verständlich, welche Werte auf den einzelnen Leitern zu finden sind. Ohne gleich zu Beginn des Rechenstabunterrichtes auf die Unterschiede der verschiedenen Skalen eingehen zu müssen, läßt sich zeigen, daß es verschiedenartige Mengen mit unterschiedlichen Elementen auf dem Rechenstab gibt.

Die einzelnen Zahlenwerte auf den Skalen lassen sich für formale Darstellungen günstig mit kleinen Buchstaben bezeichnen. Auch dies entspricht wieder der üblichen mengentheoretischen Symbolisierungsweise, Elemente einer Menge mit kleinen lateinischen Buchstaben zu belegen. Günstig wird es sein, die Schüler von vornherein an eine kombinierte Bezeichnung aus Buchstaben und Ziffernfolge zu gewöhnen. So stellt z. B. „d-1-9-4" (oder kürzer geschrieben „d-194", gelesen aber wie vorstehend) das Element 1-9-4 der Menge D dar. (Siehe ① in Abb. 2.) In gleicher Art ist „d-6-5-0" das Element 6-5-0 der Leiter (Menge) D (② in Abb. 2). Das Element 8-5-0 der Menge A findet man auf der Skala A als „a-8-5-0" (③ in Abb. 2). Den durch ④ dargestellten ebenfalls möglichen Einstellwert sollte man bei einer ersten Betrachtung noch nicht bringen.

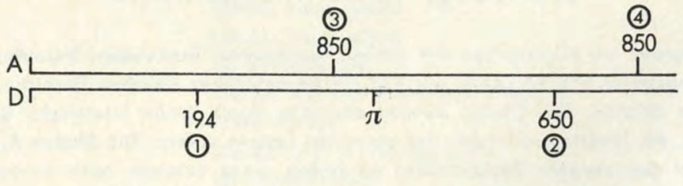


Abb. 2

Die angegebene Benennungsweise bringt verschiedene Vorteile. So ist sie u. a. eine kurze Bezeichnung von Element und Skala, gewöhnt von Anfang an an das Ablesen von Ziffernfolgen und wird von den Schülern auch rasch und ohne sonderliche Mühe angenommen.

Zwei Mengen heißen gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten. **Für diese Gleichheit von Mengen bietet der Rechenstab ebenfalls anschauliche Beispiele.** Daß die Mengen D und C gleich sind (D = C) wird sofort offensichtlich, wenn man die Zunge in die Grundstellung bringt. Dann stehen sich ja in beiden Mengen gleiche Elemente gegenüber. Ebenso offensichtlich ist für die Schüler A = B.

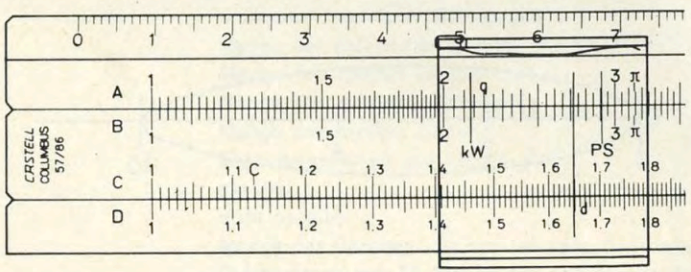


Abb. 3

Einige Anforderungen an das Denk- und Vorstellungsvermögen werden gestellt, wenn man die Beispiele für die Gleichheit von Mengen ausdehnt. **Aber auch hier bietet der Rechenstab geradezu einzigartige Veranschaulichungsmöglichkeiten.** Obendrein gewinnen die Schüler bei diesen Überlegungen große Vertrautheit mit den für den Unterricht zunächst wichtigsten Skalen.

Bei der Angabe von Mengen durch Aufzählung der Elemente kommt es auf die Reihenfolge dieser Elemente nicht an. Zum Vergleich mit den sofort als gleich zu erkennenden Mengen C und D stehen auf modernen Rechenstäben die Mengen CF, DF und CI, manchmal auch noch CIF zur Verfügung. Die Gleichheit der Mengen D und CI kann man anschaulich machen, wenn man die Zunge kopfstehend einschiebt. Der Läuferstrich gestattet dann einen elementweisen Vergleich, zugleich eine erste Übung für den Vergleich von zwei Mengen durch Zuordnung. (Man sage aber den Schülern gleich, daß das kopfstehende Einschieben der Zunge bei modernen Rechenstäben nicht erforderlich ist und hier nur ausnahmsweise durchgeführt wurde.)

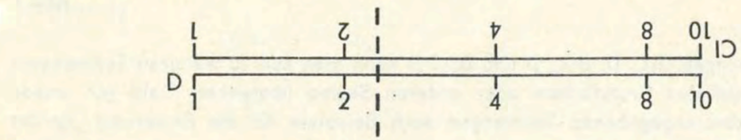


Abb. 4

Um die Gleichheit von CF und D zu zeigen, muß man die Zuordnung in zwei Teilen durchführen. Durch Zuordnung der Elemente cf-1-0-0 und d-1-0-0 kann man den Vergleich im Bereich 1 bis π durchführen. Um das elementeweise Zuordnen zwischen π und 10 zu ermöglichen, wird cf-1-0-0 zusammen mit d-10-0-0 (diese Bezeichnung nur für die erste Einführung!) unter den Läuferstrich gebracht.

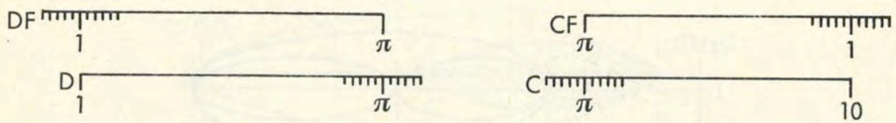


Abb. 5

Sollte man einen Rechenstab „mit Überhang" haben, z. B. ein Wandtafelmodell, bei dem CF mit dem Stück cf-3-0-0 bis cf-π beginnt, lassen sich noch Betrachtungen darüber anschließen, daß gleiche Elemente in einer Menge nur einmal aufgezählt werden.

Für den wichtigen Begriff der Teilmenge findet man ebenfalls anschauliche Beispiele bei der Betrachtung des Rechenstabes.

Eine Menge M_1 wird Teilmenge einer Menge M genannt ($M_1 \subset M$), wenn jedes Element von M_1 gleichzeitig auch in M enthalten ist.

Schülern fällt sofort auf, daß die Leiter D (und ebenso natürlich C) in die drei Bereiche 1 . . . 2, 2 . . . 4 und 4 . . . 10 zerfällt. Damit ist eine auffällige Erläuterung zum Begriff Teilmenge gegeben. Betrachtet man die Elemente des Bereichs 1 bis 2 als Menge D_1, die zum Bereich 2 bis 4 gehörenden Elemente als Menge D_2 und D_3 als Menge der Elemente im Bereich zwischen 4 und 10, so ist leicht zu erkennen, daß $D_1 \subset D$, denn jedes Element von D_1 gehört auch zu D. Mit Beispielen wie d-1-1-9$\in D_1$ und d-1-1-9$\in$D, d-$\pi \in D_2$ und gleichzeitig d-$\pi \in$ D u. ä. läßt sich der Begriff „Element von" festigen und gleichzeitig die Teilmengenbeziehung verdeutlichen.

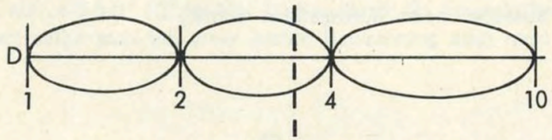


Abb. 6

Von den Beziehungen $D_1 \subset D$, $D_2 \subset D$ und $D_3 \subset D$ kann man nun zu weiteren Teilmengenbetrachtungen auf den Grundleitern oder anderen Skalen übergehen. Sehr gut lassen sich aber mit den angegebenen Teilmengen auch Beispiele für die Beziehung „gehört nicht zu" darstellen; z. B. ist ja d-$\pi \notin D_1$ und d-$\pi \notin D_3$.

Ob man auf die Umkehr-Bezeichnungen „umfaßt die Teilmenge" ($\supset$) und „umfaßt nicht" ($\not\supset$) eingehen will, bleibt dem Lehrer überlassen und hängt auch von der Klasse ab. Die drei augenfälligen Bereiche von D bieten für den Anfangsunterricht auch Beispiele für Vereinigung ($\cup$) und Durchschnitt ($\cap$) von Mengen. Unter der Vereinigung zweier Mengen versteht man die Menge aller Elemente, die zur einen oder anderen Menge (oder zu beiden) gehören. Abbildung 7 zeigt $D_2 \cup D_3$.

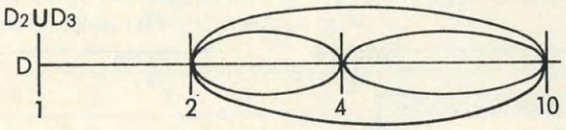


Abb. 7

Mengen, die gemeinsame Elemente enthalten, heißen konjunkt. Besitzen zwei Mengen kein gemeinsames Element, nennt man sie disjunkt. Für beide Begriffe lassen sich ebenfalls in der Menge D leicht Beispiele finden. D_1 und D_3 haben kein gemeinsames Element, sind also disjunkt. Das ist gleichbedeutend mit der Feststellung, daß der Durchschnitt der beiden Mengen leer ist: $D_1 \cap D_3 = \emptyset$. Mit $\emptyset$ (oder $\{\}$) bezeichnet man die leere Menge.

Unter dem Durchschnitt zweier Mengen versteht man die Menge der Elemente, die gleichzeitig zu beiden Mengen gehören. Es lassen sich leicht Teilmengen von D bilden, mit denen man Beispiele für die Durchschnittsbildung angeben kann.

Wir wollen unter D_4 die Menge der Elemente zwischen d-1-0-0 und d-4-0-0 verstehen, also $D_4 = D_1 \cup D_2$; zu D_5 sollen alle Elemente von d-3-0-0 bis d-5-0-0 gehören.

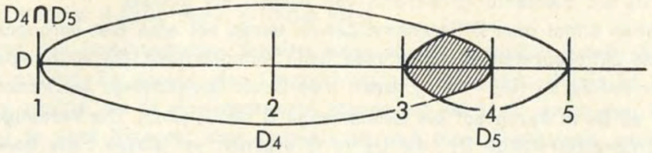


Abb. 8

In Abbildung 8 wird der Durchschnitt der Mengen D_4 und D_5 ($D_4 \cap D_5$) durch die Elemente zwischen d-3-0-0 und d-4-0-0 dargestellt.

Mit den angegebenen Beispielen von Teilmengen der Menge D lassen sich nun auch Beziehungen der Vereinigung und des Durchschnitts von Teilmengen darstellen, beispielsweise

$$D_4 \cup D_2 = D_4$$

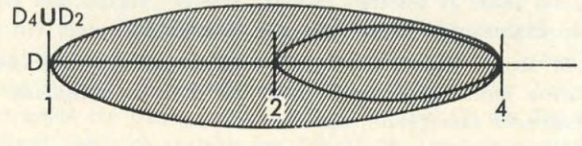


Abb. 9

oder $\quad D_4 \cap D_2 = D_2$

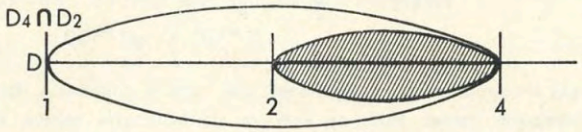


Abb. 10

Unter der Differenzmenge $M \setminus N$ versteht man die Menge der Elemente von M, die nicht zu N gehören. Beispiele sind:

$D_4 \setminus D_2 = D_1$; $D_4 \setminus D_1 = D_2$; die Differenzmenge $D_5 \setminus D_2$ (gelesen D_5 ohne D_2) umfaßt die Elemente zwischen d-4-0-0 und d-5-0-0 (siehe Abb. 11).

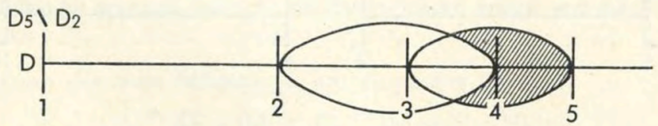


Abb. 11

Dieselben Elemente bilden die Differenzmenge $D_5 \setminus D_4$. Dagegen gehören zur Differenzmenge $D_4 \setminus D_5$ die Elemente im Bereich von d-1-0-0 bis d-3-0-0.

In vielen Fällen bildet man Differenzmengen in bezug auf eine fest vorgegebene Grundmenge. Diese Differenzmengen nennt man dann Komplemente. So ist beispielsweise D_3 das Komplement zu D_4 ($D_3 = D_4'$), wenn man D als Grundmenge betrachtet. Das Komplement D_1' zu D_1 in bezug auf die Grundmenge D ist $D_2 \cup D_3$. Die Vereinigung $D_1 \cup D_3$ bildet die Ergänzungsmenge D_2', die D_2 zu D ergänzt; im letzten Falle handelt es sich um die Vereinigung zweier disjunkter Mengen.

Zur Wiederholung der Grundbegriffe in höheren Klassen und zur Vertiefung eignen sich dann „kombinierte" Aufgaben, wie die Bildung des Durchschnitts von Vereinigungsmengen u. ä. Der Vielfalt der möglichen Aufgaben sind keine Grenzen gesetzt. Der besondere Vorteil solcher Betrachtungen am Rechenstab ist die Tatsache, daß Schüler alles vor sich sehen und jede Begriffsbildung, jeden Schritt genau verfolgen können. Die vorgenannten Begriffe lassen sich am Rechenstab verdeutlichen, auch wenn man den Rechenstab noch nicht „kennt"; so können sich Schüler mit dem Rechenstabbild vertraut machen, selbst wenn sie das systematische Lesen der Skalen erst später lernen.

Eine Bemerkung sei noch gestattet: Wir haben oben mehrfach den Begriff „zwischen" verwendet, ohne ihn genau zu erklären. Jüngere Schüler „wissen, was gemeint ist"; bei älteren kann man Überlegungen über Intervalle einschieben.

Ein Intervall heißt abgeschlossen, wenn die Randelemente zum Intervall gehören. Gehören die Endpunkte nicht zum Intervall, heißt es offen. Entsprechend bedeutet halboffen, daß ein Endpunkt dazu gehört, der andere nicht.

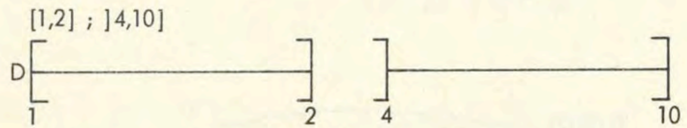


Abb. 12

So ist in Abbildung 12 das abgeschlossene Intervall [1, 2] dargestellt — die Elemente d-1-0-0 und d-2-0-0 gehören dazu — und das halboffene Intervall]4, 10] — hier ist d-4-0-0 nicht Element des Intervalls, aber d-10-0-0 gehört dazu.

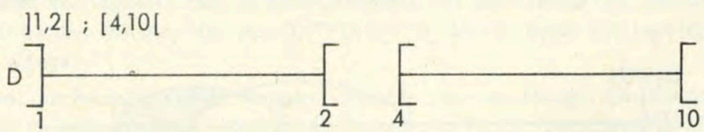


Abb. 13

In Abbildung 13 sind die beiden anderen möglichen Fälle dargestellt. Das Intervall]1, 2[ist offen, beide Endpunkte gehören nicht dazu, das Intervall [4, 10[ist halboffen, und zwar gehört diesmal d-4-0-0 dazu, d-10-0-0 nicht.

Die Erklärung des Dedekindschen Schnitts kann ebenfalls wieder Anlaß sein, zum Rechenstab zu greifen. Es genügt, den Läuferstrich auf irgendeinen Punkt im Inneren der Menge D zu stellen. Da D eine geordnete Menge ist, wird sie durch den Schnitt (den Läuferstrich) in zwei Klassen, eine Unterklasse und eine Oberklasse, zerlegt, für die sich die geforderten Eigenschaften zeigen lassen: 1. keine Klasse ist leer; 2. jedes Element von D gehört zu (genau) einer Klasse; 3. wenn d-x zur Unterklasse und d-y zur Oberklasse gehört, gilt stets d-x kommt vor d-y (hier sogar d-x $<$ d-y). 4. Auch die Forderung, daß die Oberklasse kein erstes Element besitzen soll, läßt sich erfüllen (die Oberklasse ist als nach links offenes Intervall zu betrachten), obwohl man darauf verzichten kann, wenn man D als Menge rationaler Zahlen betrachtet.

Bei fast allen bisher angestellten Betrachtungen bleibt die Zunge in der Grundstellung. Der Läuferstrich wurde nur in einigen Fällen als Einstellhilfe benutzt. Außerdem wird hauptsächlich die Skala D betrachtet; die Hauptschule kann sogar zunächst auf die übrigen schon erwähnten Skalen ganz verzichten, wenn man nicht D = C (= DF = CF) bringen will.

Die Gleichheit der Mengen D und DF (D = DF) läßt sich übrigens sehr gut in zwei Schritten zeigen: zunächst wird — wie oben angegeben in zwei Teilen — D = CF gezeigt (die Ausnahme von dem vorhin erwähnten Verbleiben der Zunge in der Grundstellung); dann ergibt die Gegenüberstellung von CF und DF die Gleichheit dieser beiden Mengen. Damit läßt sich zugleich der Begriff der Transitivität erklären; doch bringen wir Beispiele dafür erst weiter unten.

Sehr gut kann man aber noch das kommutative und das assoziative Gesetz einführen. Abbildung 8 zeigt $D_4 \cap D_5$. Es läßt sich überlegen, daß man dieselbe Menge erhält, ob man zunächst D_4 nimmt und dann mit D_5 schneidet, oder ob man umgekehrt D_5 vorgibt und mit D_4 schneidet. Es folgt also das Kommutativgesetz

$$D_4 \cap D_5 = D_5 \cap D_4.$$

Ebenso läßt sich Abbildung 8 aber als Vereinigung der konjunkten Mengen D_4 und D_5 deuten. Da es wieder offensichtlich ist, daß es nicht darauf ankommt, welche Menge man zunächst nimmt und welche man als zweite dazufügt, erhält man auch

$$D_4 \cup D_5 = D_5 \cup D_4.$$

Ebenso läßt sich mit drei Teilmengen das Assoziativgesetz erläutern, beispielsweise

$$D_1 \cup (D_2 \cup D_5) = (D_1 \cup D_2) \cup D_5$$

und

$$D_1 \cap (D_2 \cap D_5) = (D_1 \cap D_2) \cap D_5.$$

Diese Hinweise mögen hier genügen. Es wird den Kollegen nicht schwer fallen, Beispiele in Fülle selbst zu ersinnen, wenn es die Unterrichtszeit erlaubt und die Klasse im Stoff so weit ist.

Ebenso lassen sich leicht Beispiele für das distributive Gesetz

$$D_a \cap (D_b \cup D_c) = (D_a \cap D_b) \cup (D_a \cap D_c)$$

finden.

Relationen

Die Bezeichnung „Relation" verwendet man in der mathematischen Fachsprache ähnlich wie in der Alltagssprache für „Beziehung", „Zuordnung" oder „Verwandtschaft" von Elementen von Mengen. Auch der wichtige Begriff der Relation läßt sich am Rechenstab mit einer Fülle von Beispielen verdeutlichen.

Nach der Zahl n der beteiligten Elemente spricht man von n-stelligen Relationen.

Als einstellige Relationen kann man die Teilmengen einer Menge M auffassen. Beispiele zur Teilmengendarstellung haben wir oben angegeben. Oder die Elementbeziehung „ist Element von".

Am häufigsten kommen in der Praxis zweistellige oder binäre Relationen vor. Eine Teilmenge R des kartesischen Produktes M x M einer Menge M mit sich selbst nennt man eine zweistellige Relation in M. Ein Beispiel für eine solche zweistellige Relation ist die Gleichheitsbeziehung; sie ist uns u. a. beim elementeweisen Vergleich zweier Mengen begegnet. So stehen in Abbildung 4 durch den Läuferstrich markiert d-2-2-2 und ci-2-2-2 in der Gleichheitsrelation d-2-2-2 = ci-2-2-2. Augenfälliger ist die Gleichheit von Werten d-x = c-x, a-y = b-y und df-z = cf-z bei Grundstellung der Zunge.

Ein ergiebigeres Beispiel bietet die Relation „kleiner als" (<). Man kann sich wieder auf D beschränken. Markiert man durch den Läuferstrich irgendein Element, so ist jedes links davon stehende kleiner als das markierte. Jedes Element, das rechts vom Läuferstrich steht, ist größer als das markierte und steht in der Größen-Relation >. In Abbildung 6 markiert der Läuferstrich das Element d-π. Jedes links davon stehende Element ist kleiner als π, jedes rechts davon größer. Also gilt z. B. d-1-9-4 < d-π, d-6-5-0 > d-π (① und ② in Abbildung 2).

Mehr Beispiele für zweistellige Relationen bringen wir weiter unten. Zunächst wollen wir noch einige mehrstellige Relationen betrachten.

Eine dreistellige Relation ist die Beziehung „zwischen". So liegt d-π zwischen d-1-9-4 und d-6-5-0,

d-1-9-4 < d-π < d-6-5-0.

Eine weitere dreistellige Relation bildet eine gegebene Seite mit der Fläche des Quadrats und dem Volumen des Würfels mit dieser Seite (Kante). Diese dreistellige Relation markiert z. B. in Abbildung 14 der Läuferstrich für die Seite d = 2,5 cm.

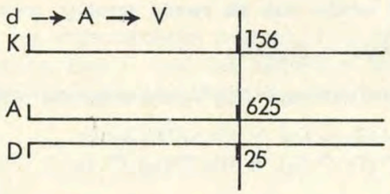


Abb. 14

Die Relation d → A → V ergibt für d = 2,5 cm die Fläche A = 6,25 cm² und das Volumen 15,6 cm³. (Der letzte Wert ist für die Praxis gerundet, ein Vorteil des Rechenstabes für angewandte Aufgaben; der genaue Wert bei „exakter" Berechnung ist 15,625 cm³.) Unter dem Läuferstrich stehen gleichzeitig d-2-5-0 ∈ D (= Seite d), a-6-2-5 ∈ A (= Fläche A) und k-1-5-6 ∈ K (= Volumen V).

Wen die „Ungenauigkeit" bei der Bestimmung von V stört, der kann beim Anfangsunterricht mit dem Rechenstab auch „einfache" Zahlentripel wählen, wie d-2-0-0 → a-4-0-0 → k-8-0-0 oder d-3-0-0 → a-9-0-0 → k-2-7-0.

Eine mehrstellige Zuordnung bildet jede Einstellung des Läuferstrichs. Gleichzeitig stehen mehrere Zahlenwerte, ein n-Tupel, unter dem Läuferstrich. Vom Typ des Stabes hängt es ab, wieviele Zahlenwerte gleichzeitig markiert werden.

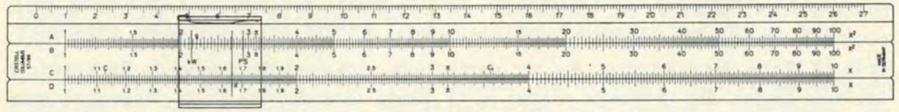


Abb. 15

Der **einfache Rechenstab Castell Columbus Nr. 57/86** weist nur die Skalen A, B, C und D auf. Der Mittelstrich des Läufers bedeckt bei einer Einstellung also vier Zahlenwerte. Der Läufer weist außerdem zwei Seitenstriche auf, die die Skalen A und B überdecken. Somit markieren die beiden Seitenstriche bei einer Läufereinstellung noch je zwei weitere Werte. Insgesamt werden also durch eine Einstellung des Läufers beim Castell Columbus 4 + 2 + 2 = 8 Zahlenwerte einander zugeordnet.

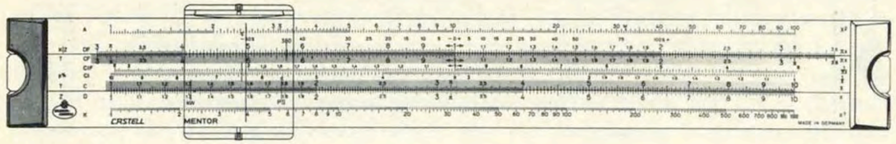


Abb. 16

Der neue Rechenstab **Castell Mentor Nr. 52/80** weist die 8 Leitern A, DF, CF, CIF, CI, C, D und K auf. Hier bezeichnet der Mittelstrich des Läufers allein sofort 8 Zahlenwerte. Drei Seitenstriche markieren je zwei Werte, so daß die Läuferstriche bei einer Einstellung gleichzeitig 14 Werte, ein „14-Tupel" zueinander in Beziehung bringen.

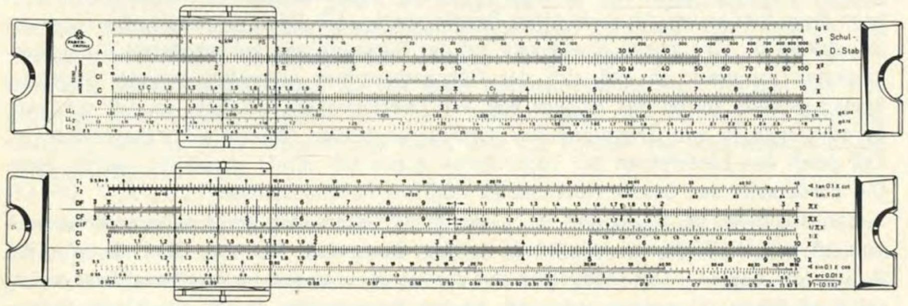


Abb. 17

Der **weitverbreitete Castell Schul-D-Stab Nr. 52/82** mit dem Zweiseitenläufer trägt auf der Vorderseite 10 Skalen, nämlich L, K, A, B, CI, C, D, LL_1, LL_2 und LL_3. Weitere 11 Leitern trägt die Stabrückseite dieses hochwertigen Schul-Modells, das übrigens erstmals bei einem Schulrechenstab die π-versetzten Skalen CF und DF mit den Exponentialskalen LL_1, LL_2 und LL_3 auf einem Gerät vereinigt. Auf der Rückseite trägt der Schul-D-Stab T_1, T_2, DF, CF, CIF, CI, C, D, S, ST und P. Der Zweiseitenläufer dieses Doppelrechenstabes ordnet also gleichzeitig mit den Mittelstrichen der Vorder- und Rückseite 21 Werte, wenn man die Werte für Cosinus und Cotangens gesondert zählt, sogar 24 Zahlenwerte einander zu. Mittelstrich und kurzer rechter Seitenstrich auf der Vorderseite bedecken gleichzeitig 12, Mittelstrich und kurzer rechter Seitenstrich auf der Rückseite 16 Werte. Dazu kommen auf der Vorderseite noch zwei durchgehende Seitenstriche auf dem Läufer, die ihrerseits wieder je 10 Werte einander zuordnen. Insgesamt markiert der Mehrstrichläufer beim Castell Schul-D-Stab mit einer Einstellung
$24 + 2 + 2 + 10 + 10 = 48$ Zahlenwerte.

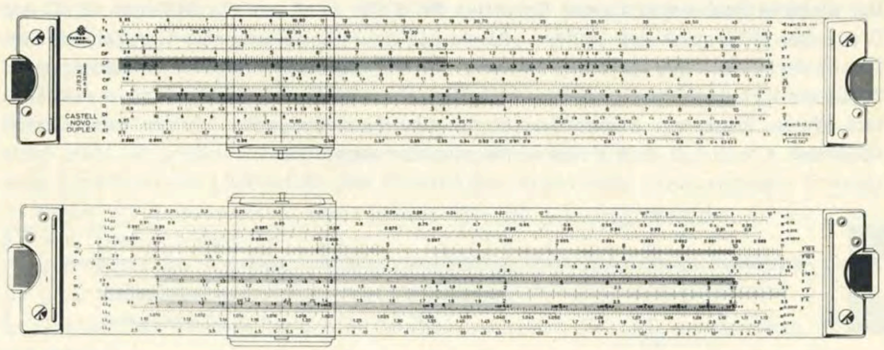


Abb. 18

Ein Computer für die Tasche ist der neue **Castell-Doppelrechenstab Novo-Duplex Nr. 2/83 N.** Er wurde für Wissenschaftler und vor allem Ingenieure aller Fachrichtungen entwickelt. In der Schule wird man ihn nicht verwenden, aber Studenten von Technischen Universitäten und Ingenieurakademien greifen gerne danach. Deshalb ist es interessant, auch diesen Spitzen-Rechenstab einmal zu betrachten. Das bisherige Teilungsbild hat man beim Novo-Duplex um die wichtigsten Quadratskalen A/B (blau unterlegt), die reziproke Grundskala DI, eine zweite Grundskala auf der Rückseite und auf insgesamt 8 Exponentialskalen erweitert, so daß sich der Gebrauchsumfang wesentlich erhöht. Sämtliche Skalen wurden, soweit das möglich war, mit Überteilungen versehen, so daß sich auch Berechnungen in den Grenzbereichen durchführen lassen. Wichtig für Kybernetiker ist, daß durch den Läuferstrich der Logarithmus dualis (ld) direkt abgelesen werden kann. Die Vorderseite des Castell Novo-Duplex trägt die Funktionsskalen T_1, T_2, K, A, DF, CF, B, CIF, CI, C, D, DI, ST, S und P. Zu diesen 15 Leitern der Vorderseite kommen weitere 16 auf der Rückseite, nämlich LL_{03}, LL_{02}, LL_{01}, LL_{00}, W_2, W_2', CI, L, C, W_1', W_1, D, LL_0, LL_1, LL_2, LL_3. Der Mittelstrich auf der Vorderseite des Läufers bezeichnet gleichzeitig 18 Werte, ebensoviel jeder der beiden Seitenstriche. Durch vier kleine Seitenstriche werden auf der Vorderseite weitere 6 Zahlenwerte markiert.

Auf der Rückseite bezeichnen der Mittelstrich und jeder der beiden Seitenstriche je 16 Zahlenwerte; weitere 4 findet man unter kleinen Seitenstrichen. Somit markieren die Läuferstriche bei einer einzigen Einstellung gleichzeitig auf der Vorderseite 60, auf der Rückseite 52, insgesamt also 112 Zahlenwerte.

Ein Hinweis auf eine Besonderheit des Castell Novo-Duplex sei uns noch gestattet. Die Wurzelskalen W_1, W_1', W_2 und W_2' ermöglichen eine Rechengenauigkeit auf 4 Stellen, da die Teilungen bei $\sqrt{10} = 3{,}16$ abgebrochen und auf zwei Skalenpaare verteilt sind. Zum erstenmal ist damit ein Doppelstab in handlicher Form vorhanden, der für die wichtigsten Rechenarten die erhöhte Genauigkeit der Halbmeter-Skalenlänge bringt.

Das einfache belanglose Bilden von Zahlengruppen, die beliebige Zusammenfassung von Elementen zu n-Tupeln erfolgt am Rechenstab schon nach gewissen Vorschriften, die auf der Anordnung der Skalen und der Läuferstriche beruhen. Betont man die Verwandtschaften der Zahlen, die die verschiedenen Zahlentupel bilden, so kommt man zu bestimmten Relationen.

Leicht einsichtige formale Verwandtschaften bilden am Rechenstab die Beziehungen „liegt über" oder „liegt neben". Die Relation „liegt neben" kann man mit der Größer- oder Kleiner-Relation in Verbindung bringen.

Die Relation „liegt über" führt auf die eigentliche Anwendung des Rechenstabes. Jede Stellung der Zunge bestimmt z. B. auf den Skalen D und C eine Menge quotientengleicher Zahlenpaare. Damit sind wir beim häufigsten Anwendungsgebiet des Rechenstabes in der Schule, bei den numerischen Berechnungen. Da das Rechnen mit quotientengleichen und produktgleichen Größenpaaren — eine ausdrückliche Forderung der bei den Vorbemerkungen erwähnten „Richtlinien und Rahmenpläne" — allen Kollegen vom Unterricht bestens vertraut ist, wollen wir in dieser kleinen Schrift nur einige Beispiele bringen, die sich beliebig vermehren lassen. Wer sich umfassender informieren will oder mehr Beispiele sucht, sei nochmals auf unsere ausführlichere Darstellung verwiesen.
Quotientengleiche Wertepaare lassen sich als Brüche deuten. Man kann dann die Teilerrelation herauslesen; allerdings muß mit dem Läuferstrich eine Auswahl getroffen werden. Eine Zungeneinstellung reicht aus, um die Menge von Vielfachen festzustellen, die mit einem festen Faktor multipliziert sind. Wir kommen damit schon in den Bereich der Umkehrrelationen, über die weiter unten noch einiges gesagt wird.

Quotientengleiche Zahlenpaare geben die Möglichkeit zu den verschiedensten Deutungen, vor allem im Bereich des sogenannten bürgerlichen Rechnens. Stellt man mit den Skalen D und C eine Verbindung her zwischen Menge und Preis einer Ware, so hat man eine Menge-Preis-Relation, die mit einer Grundeinstellung eine Vielzahl von Aufgaben zu lösen gestattet; man könnte diese Relation auch als „Verkaufs"-Relation bezeichnen, denn zu jeder Warenmenge findet man als Partner des zusammengehörigen Zahlenpaares den Preis.

Ähnlich lassen sich quotientengleiche Zahlenpaare als Elemente von Tabellen interpretieren, wenn man tabelliert. Die ganze Vielfalt der Aufgaben, die man den Schülern bisher mit dem Rechenstab schon vorgeführt hat, läßt sich hier einordnen. Besonders gilt das für die Kollegen, die schon bisher das Proportionsprinzip für das Lösen von Aufgaben mit dem Rechenstab angewendet haben.

Eine Zungeneinstellung genügt, um auf den Skalen D und CI produktgleiche Wertepaare mit dem Läuferstrich aufsuchen zu können. Wieder läßt sich eine Vielzahl von Aufgaben finden und entsprechend interpretieren.

Häufig werden noch Zuordnungen wie die folgenden angewendet:
Zu Elementen aus der Menge D findet man in der Menge A die Quadratzahlen. Die Zuordnung besorgt der Läuferstrich. Ebenso läßt sich zwischen D und K mit dem Läuferstrich die Relation Zahl $\rightarrow$ Kubikzahl herstellen.

Stellt man die Verbindung zwischen den Skalen D und DF her, ebenfalls wieder mit Hilfe des Läuferstrichs, so gewinnt man die Relation dRU, die Zuordnung des Durchmessers als Element von D mit dem zugehörigen Kreisumfang als Element von DF.

In ähnlicher Weise markiert der Mittelstrich auf D und der linke Seitenstrich auf A die Relation d R A, die den Durchmesser als Element von D mit der Kreisfläche als Element von A in Beziehung bringt.

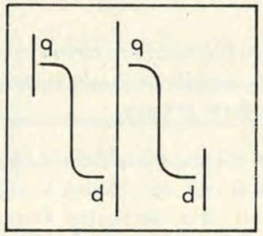


Abb. 19

Selbstverständlich liefert der Übergang von der Strichmarke d rechts unten auf der Vorderseite des Läufers zum Mittelstrich dieselbe Relation: Durchmesser $\rightarrow$ Fläche, d R A (siehe Abb. 19).

Eine dreistellige Relation erhält man, wenn man mit einer Einstellung, nämlich den Durchmesser auf D unter dem Läuferstrich, Umfang U auf DF ebenfalls unter dem Läuferstrich, Fläche A unter dem linken Seitenstrich auf A — zum Durchmesser Kreisumfang und Kreisfläche gleichzeitig findet.

Sehr leicht läßt sich mit Hilfe des Rechenstabs der Begriff der Umkehrrelation veranschaulichen. Man muß nur die Zahlenpaare in umgekehrter Reihenfolge betrachten.

Alle Zahlenpaare, die uns am Rechenstab begegnen, sind geordnete Zahlenpaare. Die Reihenfolge der Elemente ist von Bedeutung. Wenn man die Reihenfolge der Elemente, die das Paar bilden, vertauscht, erhält man am Rechenstab die Umkehrrelation. Der große Vorteil der Zuordnung am Rechenstab mittels der Läuferstriche ist die Tatsache, daß die Relationen und auch die Umkehrrelationen eindeutig sind.

Die Umkehrrelation zu d R U, Durchmesser $\rightarrow$ Umfang, ist $U\,R^{-1}\,d$, bei der man in der Menge DF den Kreisumfang U mit dem Läuferstrich aufsucht und unter dem Läuferstrich in der Menge D den Durchmesser d findet.

Erfolgt der in Abbildung 19 dargestellte Übergang d $\rightarrow$ q in umgekehrter Richtung, hat man die Umkehrrelation $A\,R^{-1}\,d$, bei der man zur Kreisfläche A den Durchmesser d findet.

Eine Relation zwischen Kilowatt (kW) und Pferdestärken (PS) läßt sich mit dem Mittelstrich und dem rechten Seitenstrich des Läufers herstellen. Jede Läuferstellung ordnet zwei Werte — kW unter dem Mittelstrich, PS unter dem rechten Seitenstrich — aus der Menge A einander in umkehrbar eindeutiger Weise zu.

Eine Bemerkung sei uns hier gestattet: Seit dem 5. Juli 1970 gilt in der Bundesrepublik Deutschland durch Gesetz das Internationale Einheitensystem. Daraus ergeben sich in Zukunft auch für den Unterricht in der Schule, besonders für den Physikunterricht, Konsequenzen. Eine ganze Reihe von heute noch gebräuchlichen Einheiten — neben Kilopond und Kilokalorie u. a. auch atü und PS — dürfen nach einer festgelegten Übergangszeit nicht mehr verwendet werden. Wer sich dafür interessiert, findet einige Ausführungen dazu am Ende dieser Schrift.

Die angeführten Beispiele von Relationen mögen in diesem Überblick über den Rechenstab als Hilfsmittel zur Veranschaulichung der Mengenlehre genügen. Einige Betrachtungen seien aber noch zur Systematik der Relationen angestellt.

Eine (zweistellige) Relation R in einer Menge M heißt reflexiv, wenn für alle Elemente $x \in M$ gilt: x R x. Da jede Zahl sich selbst gleich ist — $x = x$ — und wir auf dem Rechenstab Zahlen dargestellt haben, kann man jede abgelesene Zahl als Beispiel für die Reflexivität einer Relation deuten. Wenn für kein Element $x \in M$ gilt: x R x, dann wird die Relation irreflexiv (oder antireflexiv) genannt.

Wenn aus x R y und y R z stets folgt: x R z, dann nennt man die Relation transitiv. Beispiele für die Transitivität lassen sich in großer Zahl am Rechenstab finden. Die oben angeführten Relationen „größer als“ und „kleiner als“ sind transitiv (und außerdem irreflexiv). Ebenso kann man die Beziehung „liegt über“ am Rechenstab als Beispiel der Transitivität deuten, wenn man sie zweimal verkettet. Wenn R bedeutet „liegt über“, so folgt aus c R d und a R c auch a R d; wählt man $d \in D$, $c \in C$ und $a \in A$, so lassen sich leicht mit Hilfe des Läufers Beispiele finden. Ebenso liefert die Verkettung mehrerer Relationen hier Beiträge: d R a und a R A wäre ein Beispiel, bei dem aus dem Kreisradius auf D (d) zunächst die Quadratzahl (a) auf Leiter A gesucht wird, das ist d R a; multipliziert man nun den Wert a mit π, das ist die Relation a R A, so gewinnt man die Kreisfläche (A). Beide Relationen hintereinander angewandt lösen die Aufgabe: Bestimme aus dem Radius die Kreisfläche (d R A). Zahlentupel am Rechenstab sind grundsätzlich transitiv.

Symmetrisch wird eine Relation genannt, wenn aus x R y stets y R x folgt. Stellt man die Zunge in Grundstellung, so lassen sich die Elemente von D und C, von A und B, von DF und CF einander umkehrbar eindeutig zuordnen. Ebenso lassen sich aber mit dem Läuferstrich Elemente von C und CI oder CF und CIF einander zuordnen. Erst- und Zweitelement sind bei allen diesen Paarbildungen vertauschbar.

Schließt x R y stets y R x aus, so wird die Relation asymmetrisch genannt. Auch dafür bietet der Rechenstab Beispiele, etwa wieder die Relationen „kleiner als“ ($<$) oder „größer als“ ($>$).

Mit diesen Eigenschaften lassen sich nun einige besondere, häufig vorkommende Relationen definieren.

Eine Relation R in M heißt eine Äquivalenzrelation, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Die schon dargestellte Gleichheit von Mengen ist ein Beispiel einer solchen Äquivalenzrelation. Jede Äquivalenzrelation zieht eine Klasseneinteilung nach sich.

Bisher wurden schon mehrfach Relationen angeführt, die es gestatten, innerhalb der Elemente einer Menge eine bestimmte Ordnung herzustellen. „Kleiner als", „größer als", „steht hinter", „steht vor" usw. sind solche Relationen. Eine Relation, die reflexiv, asymmetrisch (antisymmetrisch) und transitiv ist, heißt Ordnungsrelation. Betrachtet man die Elemente irgendeiner Leiter, so besteht zwischen ihnen jedesmal eine Ordnungsrelation: jedes Element ist sich selbst gleich (reflexiv), wenn ein Element links von einem anderen steht, kann es nicht gleichzeitig rechts davon stehen (asymmetrisch), und schließlich folgt aus drei Elementen, die von links nach rechts in der Reihenfolge x, y, z stehen: steht x vor y und y vor z, dann steht auch x vor z (transitiv).

Schließt man die Eigenschaft der Reflexivität bei einer Ordnungsrelation aus, so spricht man von einer strengen Ordnungsrelation. Beispiele dafür sind „größer als" und „kleiner als", die ja beide irreflexiv sind: keine Zahl kann größer oder kleiner als sie selbst sein.

Gibt es in der Menge, in der die Relation erklärt ist, ein erstes Element, und hat auch jede nicht leere Teilmenge von M ein erstes Element, so nennt man eine strenge Ordnungsrelation eine Wohlordnung. Betrachtet man die Menge der Strichlein auf den Skalen, so läßt sich damit der Begriff der Wohlordnung veranschaulichen. Beispielsweise beginnt D mit dem ersten Element d-1-0-0; aber auch jede Teilmenge an Markierungsstrichen, die man auswählt, hat ein erstes Element. (Wir betrachten hier die Menge der Strichlein einer Skala; beim Dedekindschen Schnitt wird die Leiter als Zahlenmenge betrachtet, zu der auch die nichtmarkierten Werte gehören sollen; dann findet man in jeder nichtleeren Teilmenge von $\mathbb{Q}$ kein erstes Element.)

Streng genommen hätten wir in den vorstehenden Ausführungen zwischen Relationen unterscheiden sollen, die in einer Menge erklärt sind, z. B. in D oder A, und Relationen, die eine Zuordnung zwischen verschiedenen Skalen sind. Ordnet man nämlich die Elemente einer Menge M_1 den Elementen einer Menge M_2 zu, so ist es möglich, daß mindestens einem Element aus M_1 mehrere Elemente aus M_2 entsprechen; dann heißt die Relation mehrdeutig. Entspricht jedem Element aus M_1 aber genau ein Element aus M_2, dann nennt man die Relation eindeutig.

Eine eindeutige Relation bezeichnet man als Funktion oder Abbildung.
Die „Elemente" von Relationen sind geordnete Paare, wie wir oben gesehen haben. Damit können wir eine Funktion (Abbildung) definieren als Relation, in der verschiedene Elemente verschiedene erste Koordinaten haben. Diese Forderung besagt, daß jedem x aus der Urbildmenge nur ein Element y in der Bildmenge entsprechen darf.

Abbildungen

Mit den so definierten Abbildungen oder Funktionen betreten wir das eigentliche Gebiet, in dem der Rechenstab fruchtbar eingesetzt werden kann.

Im vorigen Abschnitt wurde gezeigt, wieviele Möglichkeiten es gibt, Zahlentupel am Rechenstab auf verhältnismäßig einfache Art und Weise zu bilden und auch darzustellen. Man bringt die Elemente einer Menge M_1 mit den Elementen einer Menge M_2 in Verbindung und kann diese Zuordnung — Relation — (soweit sie vernünftig ist) auf verschiedene Weise interpretieren. So lassen sich beispielsweise die sogenannten bürgerlichen Rechnungsarten im Rahmen der Mengenlehre einführen.

Die Zuordnungsvorschrift, die den Elementen von M_1 die Elemente von M_2 zuordnet, nennt man Abbildungsvorschrift oder Funktion. Die Menge M_1, aus der die Abbildung erfolgt, heißt dabei die Urbildmenge, die Menge M_2, in die abgebildet wird, Bildmenge. Bezeichnet man die Relation R, die Elementen x aus M_1 ($x \in M_1$) andere Elemente y aus M_2 ($y \in M_2$) zuordnet, speziell mit dem Buchstaben f, so erhält man die bekannte Darstellung $x f y$ oder $y = f(x)$. Vielfach findet man dafür auch die Schreibweise

$$f : x \rightarrow y.$$

Die Forderung, daß jedem Element der ersten Menge M_1 genau ein Element der zweiten Menge M_2 zugeordnet sein soll, ist auch dann erfüllt, wenn zwei verschiedenen Elementen der ersten Menge ein- und dasselbe Element der zweiten Menge zugeordnet ist. Die Zuordnung auf dem Rechenstab bewirkt, daß verschiedenen Elementen von M_1 auch verschiedene Elemente von M_2 entsprechen. Damit läßt sich die Zuordnung f in eindeutiger Weise umkehren. Ist eine Abbildungsvorschrift f eindeutig und auch die umgekehrte Zuordnung f^{-1} wieder eindeutig, so heißt f eine umkehrbar eindeutige oder eineindeutige Zuordnung. Mit solchen eindeutig invertierbaren Funktionen haben wir es am Rechenstab in der Regel zu tun.

Es sollen nun einige Beispiele zu dem vorstehend Erläuterten gebracht werden.

Zur Durchführung der Abbildungen am Rechenstab stehen mehrere Möglichkeiten zur Verfügung. Zunächst gibt es Abbildungen, die man allein mit dem Läufer vornehmen kann. Die einfachste Möglichkeit ist dabei, den Läuferstrich allein zu benützen.
Die Funktion $x \rightarrow x^2$ erfordert eine Zuordnung von Elementen von D und A. Jedem Element x auf der Skala D entspricht ein Wert $y = x^2$ auf der Leiter A.

Sehr gut läßt sich hier zeigen, wie man mit dem Rechenstab in einfacher Weise Wertetabellen aufstellen kann. Um z. B.

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,8	2,0	2,5	usw.
y	1,0	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	3,24	4,0	6,25	

zu erhalten, braucht man nur den Läufer zu verschieben. Die entsprechende Tabelle im Bereich $0 \leq x < 1$ findet man ebenfalls in genügend kleinen Schritten, um den Graphen genau zeichnen zu können, dazu:

x	0	0,1	0,2	0 3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
y	0	0,01	0,04	0,09	0,16	0,25	0.36	0,49	0,64	0,81

Man erhält den bekannten rechten Ast der Normalparabel.

Der Möglichkeit zu eindrucksvoller Demonstration des Vorteils, Wertetabellen mit dem Rechenstab aufzustellen — man wird dazu später weitere Beispiele bringen —, sollten sich nun erst die Überlegungen anschließen, wie man auch den anderen Ast der Kurve findet, d. h. darauf hinzuweisen, daß die Benützung des Rechenstabes eine Hilfe ist, die man sinnvoll in mathematische Überlegungen einbauen kann, die man aber nicht einfach schematisch anwenden darf. In diesem Beispiel liefert bloße Rechenstabbenutzung nur eine Teillösung, wie die Wertetabelle zeigt.

Allerdings ermöglicht die Beschränkung auf positive x-Werte, die die Anwendung des Rechenstabes sozusagen automatisch mit sich bringt, die eindeutige Umkehrung, also das Aufstellen einer Wertetabelle geordneter Paare der Umkehrfunktion

$$y \rightarrow \sqrt{x}.$$

Die Abbildung erfolgt einfach in umgekehrter Richtung, Elementen aus der Urbildmenge A werden Elemente der Bildmenge D zugeordnet.

Hier zeigt sich erneut, wie leicht man Begriffe mit dem Rechenstab veranschaulichen kann: „Umkehrabbildung" wird auch ein schwacher Schüler verstehen.

Als nächster Schritt folgt das Aufstellen von Wertetabellen zu Abbildungen der Form $x \rightarrow a\,x^2$.

Beispiel: $y = 2{,}5\ x^2$.

Um Aufgaben des Typs ab^2 lösen zu können, wird zunächst quadriert und dann multipliziert, also durch Vertauschung der Faktoren die Form b^2a hergestellt. Bevor den Schülern die Wurzellehre vertraut ist, müßte man zu jedem Wert x^2 die Multiplikation mit 2,5 vornehmen, d. h. jeder Wert der Wertetabelle muß gesondert berechnet werden.

Nach der Zuordnung $d\text{-}x \rightarrow a\text{-}x^2$ mit dem Läuferstrich muß jedesmal b-1-0-0 unter den Läuferstrich gezogen und gegenüber b-2-5-0 auf A das Ergebnis abgelesen werden, bevor man den nächsten y-Wert berechnen kann. Der hier erforderliche Aufwand ist allerdings relativ hoch und deshalb unbefriedigend. Sobald die Schüler aber einen Einblick in die Wurzellehre haben, wird man ausnützen, daß der Term $2{,}5\ x^2$ denselben Wert hat wie der Term $(\sqrt{2{,}5}\ x)^2$. Dann löst man die Aufgabe in folgender Art: Als Grundeinstellung berechnet man $\sqrt{2{,}5}$; bei der Abbildung von a-2-5-0 auf D steht der zugehörige Wurzelwert auf D. Wird jetzt der Anfang von C unter den Läuferstrich gezogen, findet man auf C Elemente, die den Wert $\sqrt{2{,}5} \cdot d\text{-}x$ haben (d-x ist ein Element x aus der Menge D, keine Differenz!). Die Aufstellung der Wertetabelle erfolgt nun mit dem Läuferstrich: zu einem x-Wert aus der Urbildmenge (in diesem Falle) C findet man den zugehörigen Bildwert $y = 2{,}5\,x^2$ auf A. So kann man die Wertetabelle aufstellen:

x	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,5	2,0	2,5	usw.
y	0,1	0,4	0,9	1,6	2,5	5,6	10	15,6	

Eine „unerwünschte" Genauigkeit wird dabei automatisch vermieden. Rechenwerte wie $y = 5{,}625$, der zu $x = 1{,}5$ gehört, werden „gerundet"; denn für den Graphen läßt sich solche Genauigkeit sowieso nicht verwenden. Die Abbildung 20 zeigt das Einstellschema, unter dem Läuferstrich findet man gerade das Wertepaar c-1-5-0 / a-5-6-2.

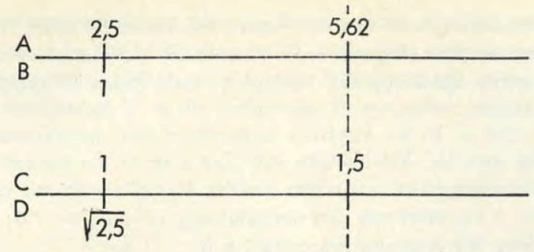
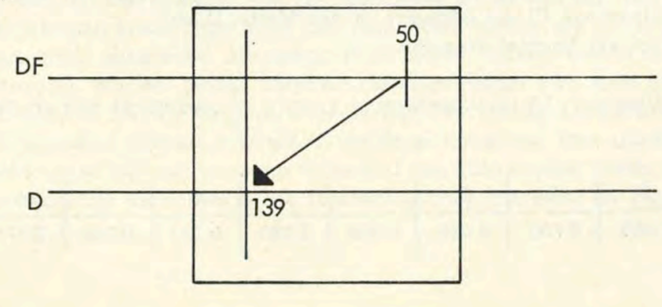


Abb. 20

Nur der Läuferstrich wird bei einer Vielzahl anderer Funktionen verwendet, die wir zum Teil schon in dem Abschnitt über Relationen angedeutet haben.
Die Funktion $x \rightarrow x^3$ (Abbildung von D auf K) und ihre Umkehrfunktion $x \rightarrow \sqrt[3]{x}$ (Umkehrabbildung von K auf D) gehören ebenso hierher wie $x \rightarrow \lg x$ (Abbildung D auf L), $x \rightarrow \frac{1}{x}$ (Abbildung C auf CI), $x \rightarrow x\,\pi$ (Abbildung D auf DF, Kreisumfang aus Durchmesser) mit ihren Umkehrungen und ähnliche Funktionen.
Einige Abbildungen scheinen zunächst doppeldeutig. Denn die Skalen T und S beispielsweise sind doppelt bezeichnet, schwarz und rot. Durch Einschränkungen im Geltungsbereich, also die Festlegung auf Sinus oder Cosinus bzw. Tangens oder Cotangens lassen sich aber auch hier eineindeutige Abbildungen erzielen.
Mittelstrich des Läufers und ein Seitenstrich sind bei anderen Abbildungen erforderlich. Die bereits dargestellte Zuordnung von Kreisdurchmesser und Kreisfläche, der Übergang vom Durchmesser $d \in D$ (unter dem Mittelstrich) zum Wert $A = \frac{d^2}{4}\pi$ als Element $a \in A$ (unter dem linken Seitenstrich) gehört hierher; das Schema dieser Abbildungsvorschrift zeigt Abbildung 19.
Die Striche des Läufers erlauben die Abbildung 1 kW $\widehat{=}$ 1,360 PS und umgekehrt. Nachdem die Einheit PS in Zukunft nicht mehr angewendet werden darf — dazu einige Bemerkungen im Anhang — ist die Umkehrabbildung PS → kW besonders bedeutsam.
Mittelstrich und rechter Seitenstrich sind in Verbindung mit den Leitern DF und CF bedeutsam zur Berechnung von Zinsen oder zur Umrechnung von Geschwindigkeiten.
Der Zusammenhang $1\ \frac{m}{s} = 3{,}6\ \frac{km}{h}$ führt auf die folgende Abbildung:
Stellt man den Läuferstrich auf einen Wert $d \in D$ (beim Schul-D-Stab beispielsweise auf der Stabrückseite) in $\frac{m}{s}$, so findet man unter dem rechten Seitenstrich den zugehörigen Wert $df \in DF$ in der Einheit $\frac{km}{h}$. Ein Beispiel für die Umkehrabbildung gibt die in Abbildung 21 dargestellte Umrechnung $50\ \frac{km}{h} = 13{,}89\ \frac{m}{s}$ (die für alle Autofahrer wichtig ist).

Abb. 21



Beispiele zur Zinsrechnung und aus dem kaufmännischen Rechnen findet man u. a. in der Broschüre „Rechenstab-Lehrgang für den Kaufmann", die die Firma FABER-CASTELL auf Anforderung gerne kostenlos zur Verfügung stellt (auch in entsprechender Anzahl für die Schüler).

Die Zunge benötigt man bei Abbildungen vom Typ $x \rightarrow ax$. Es handelt sich um die vertrauten Multiplikationsaufgaben, vor allem um das Multiplizieren mit konstantem Faktor. Das Beispiel $y = 1{,}7\,x$ führt zur Grundeinstellung c-1-0-0 / d-1-7-0; mit dem Läuferstrich kann man eine Wertetabelle erarbeiten, z. B.

C	x	1,5	1,8	2,0	2,5	3,0	3,4	6,0	7,8
D	y	2,55	3,06	3,4	4,25	5,1	5,78	10,2	13,26

Die Zuordnung erfolgt von der Urbildmenge C in die Bildmenge D. Bei den beiden letzten Wertepaaren zeigt sich der Vorteil der versetzten Skalen CF und DF. Die Abbildung 22 zeigt die Einstellung, unter dem Läuferstrich findet man $1{,}7 \cdot 3{,}4 = 5{,}78$.

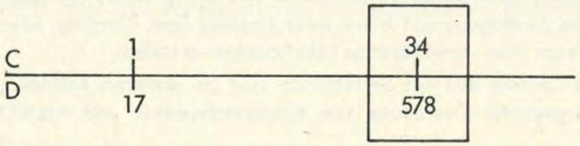


Abb. 22

Dieser Abbildungstyp ergibt die in den Richtlinien geforderten quotientengleichen Wertepaare. Die stoffliche Vertiefung kann jeder Kollege ebenso wie das Aufsuchen weiterer Beispiele selbst leicht durchführen.

Die Umkehrabbildung $x \rightarrow \frac{x}{a}$ läßt sich mit derselben Grundeinstellung durch umgekehrtes Ablesen — von D (Urbildmenge) nach C (Bildmenge) — leicht durchführen.
Die Funktion $x \rightarrow a : x$, d. h. die Division eines konstanten Dividenden durch einen variablen Divisor, gibt Anlaß zu Betrachtungen über geeignete Umformungen. Solche Umformungen nimmt man in vielen Fällen vor, um Aufgaben für den Einsatz des Rechenstabes zu „programmieren". Beim vorliegenden Aufgabentyp formt man $y = a : x$ zweckmäßig in die Produktform $y = a \cdot \frac{1}{x}$ um. Die Berechnung erfolgt dann am günstigsten mit Hilfe der Kehrwertskale CI. Nach der Grundeinstellung liest man zu Werten aus der Urbildmenge CI die Bildwerte in der Menge D ab.
Auch dazu sei ein Beispiel angeführt.

Zu der Funktion $y = 1{,}4 : x$, umgeformt in $y = 1{,}4 \cdot \frac{1}{x}$, errechnet man als Wertetabelle z. B.

CI	x	1	2	3	4	5	6	7	8
D	y	1,400	0,700	0,466	0,350	0,280	0,233	0,200	0,175

Manche Schüler müssen an dieser Stelle nochmals daran erinnert werden, daß die CI-Skala rückläufig ist, d. h. die Leiter von rechts nach links gelesen werden muß.
Die Grundeinstellung ist ci-10-0-0 / d-1-4-0. Die Zuordnung mit Hilfe des Läuferstrichs erfolgt aus der Urbildmenge CI in die Bildmenge D, wie schon angegeben. Abbildung 23 bringt die Grundeinstellung; der Läuferstrich markiert $1{,}4 : 5 = 0{,}28$.

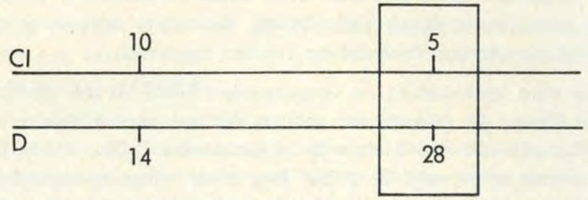


Abb. 23

Die Umkehrabbildung ergibt dieselben Wertepaare. Eigenart der Kehrwertskala ist es ja, daß sich Erst- und Zweitelement bei der Zuordnung vertauschen lassen. Die Umkehrfunktion $y = 1{,}4 : x$ ist mit der Ausgangsfunktion identisch.

Mit dem Rechenstab ist es leicht möglich, einem $x \in M_1$ ein $y \in M_2$ zuzuordnen, und diesem y dann wieder ein $z \in M_3$. Man erhält so eine Verkettung von Abbildungen. Diese Verkettung von zwei Abbildungen nacheinander entspricht einer Abbildung von x aus der Menge M_1 auf ein z aus M_3. Im Grunde genommen liegt hier dasselbe Problem vor wie bei der Transitivität von Relationen.

Ein Beispiel ist die mehrfache Multiplikation. Der „große Bruchstrich" — abwechselndes Dividieren und Multiplizieren — gehört ebenfalls hierher. Alle Aufgabentypen wie a^2b, $\sqrt{a} \cdot b$, $b : a^2$, $b : \sqrt{a}$, $a^2 : b$, $\sqrt{a} : b$ usw. können hier genannt werden.

Die Berechnung des Volumens eines Zylinders führt auf die Anwendung mehrerer Abbildungen nacheinander. Nach der Berechnung der Grundfläche folgt noch die Multiplikation mit der Höhe.

Das interessante Gebiet der Verkettung von Abbildungen soll hier nicht ausgeweitet werden. Wer dazu weitere Ausführungen sucht und Beispiele genannt haben möchte, sei nochmals auf unsere ausführliche Darstellung verwiesen.

Die Verbindung von Abbildungen kann bereits zu recht komplizierten Gebilden führen, die sich allerdings am Rechenstab meist gut darstellen lassen. Manche Verkettungen führen sogar zu Abbildungen, die in der Mathematik gar nicht gebräuchlich sind.

Betrachtet man alle Möglichkeiten, die der Rechenstab im Bereich der Abbildungen und ihrer Verknüpfungen bietet, kann man den Rechenstab bereits als perfekte Datenverarbeitungsmaschine bezeichnen. Allerdings ist zu seinem Einsatz dann eine Programmtabelle notwendig. Wie bei großen Datenverarbeitungsanlagen wird auch beim Rechenstab das Denken in kleinste Rechenschritte zerlegt. Die Lösung komplizierter und umfangreicher Aufgaben verlangt eine gründliche Programmierung. Hier lassen sich zahlreiche Verbindungen zwischen unserem Hilfsmittel und EDV-Anlagen finden. Der Einsatz des Rechenstabes zur Bereicherung des Unterrichtsfaches Informatik ist aber ein Thema für sich.

Strukturen

Man nennt eine Menge M „mit einer Struktur $\mathfrak{S}$ versehen" [in Zeichen: $(M, \mathfrak{S})$], wenn in M eine oder mehrere Relationen oder Verknüpfungen definiert sind oder wenn in M ein Teilmengensystem ausgezeichnet ist.

Im vorhergehenden Abschnitt wurden zum Schluß Verknüpfungen zwischen Abbildungen angesprochen. Allgemein heißt eine Abbildung eines kartesischen Produktes $M_1 \times M_2$ in eine Menge M eine (zweistellige) Verknüpfung. Besonders bezeichnet man eine Abbildung $M \times M \rightarrow M$ als „innere Verknüpfung" in der Menge M.

Ein Beispiel für eine Verknüpfung im vorgenannten Sinne ist die Multiplikation. Nimmt man für M die Menge $\mathbb{R}$ (Menge der reellen Zahlen), so ist hinsichtlich der inneren Verknüpfung Multiplikation die Menge $\mathbb{R}$ abgeschlossen. Das Produkt zweier reeller Zahlen ergibt wieder eine reelle Zahl. Der Begriff der Abgeschlossenheit verlangt aber gerade, daß mit zwei Elementen auch ihre Verknüpfung zur Menge gehört.

Mit Hilfe von Verknüpfungen lassen sich in Mengen verschiedene Strukturen unterscheiden.

Eine Menge M heißt eine G r u p p e, wenn für ihre Elemente eine Verknüpfung so definiert ist, daß folgende Postulate (Gruppenpostulate) erfüllt sind:

a) Sind x und y zwei — gleiche oder verschiedene — Elemente von M, so gehört auch $x \circ y$ zu M. Dabei ist $\circ$ ein Zeichen, das allgemein „verknüpft mit" bedeutet.)
b) Die Verknüpfung is assoziativ, also $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$ für alle $x \in M$, $y \in M$ und $z \in M$.
c) Es gibt ein Neutralelement e mit der Eigenschaft, daß $x \circ e = e \circ x = x$ für alle $x \in M$.
d) Zu jedem Element $x \in M$ gibt es ein inverses Element $x^{-1} \in M$, so daß $x^{-1} \circ x = x \circ x^{-1} = e$ gilt.

Ein Beispiel läßt sich leicht am Rechenstab mit der Multiplikation als Verknüpfung zeigen. Die vier Postulate werden erfüllt.

a) Mit zwei Elementen gehört auch ihr Produkt zur Menge.
b) Die Assoziativität wurde schon oben bei den Relationen gezeigt.
c) Neutralelement ist die 1. Die Multiplikation einer beliebigen Zahl mit 1 ergibt immer wieder die Zahl.
d) Auf CI findet man die Inverselemente zu C. Das Produkt eines Elements mit seinem Kehrwert, zugeordnet durch den Läuferstrich, ergibt immer das Neutralelement 1.

Als Zusatzbedingung kann man das Kommutativgesetz fordern: $x \circ y = y \circ x$ ($x \in M$, $y \in M$). Dann heißt die Gruppe k o m m u t a t i v e G r u p p e (abelsche Gruppe).

Bei den Relationen haben wir gezeigt, daß am Rechenstab für die Grundleitern das kommutative Gesetz gilt: $x \cdot y = y \cdot x$. Damit haben wir mit der Multiplikation als Verknüpfung sogar ein Beispiel für eine kommutative Gruppe.

Eine Menge M heißt H a l b o r d n u n g oder V e r e i n, wenn in ihr eine Ordnungsrelation definiert ist. Auch dafür bietet der Rechenstab Beispiele; die Skalen sind ja geordnete Mengen.

Weitere Strukturen sind Verbände, Ringe, Körper usw. Wenigstens die Erklärungen dieser Begriffe sollen noch folgen.

Ein Verband ist eine spezielle Halbordnung, in der zwei Verknüpfungen $\sqcap$ und $\sqcup$ erklärt sind, für die folgende Axiome erfüllt werden sollen:

Kommutativgesetz $x \sqcap y = y \sqcap x$ und $x \sqcup y = y \sqcup x$
Assoziativgesetz $x \sqcap (y \sqcap z) = (x \sqcap y) \sqcap z$ und $x \sqcup (y \sqcup z) = (x \sqcup y) \sqcup z$
sowie ein „Absorptionsgesetz" $x \sqcap (x \sqcup y) = x$ und $x \sqcup (x \sqcap y) = x$.

Wegen der zwei in einem Verband erklärten Verknüpfungen findet man dafür auch manchmal die Bezeichnung Dualgruppe.

Unter einem Ring versteht man eine algebraische Struktur, in der zwei zweistellige innere Verknüpfungen erklärt sind, meist Addition (+) und Multiplikation ($\cdot$), so daß folgende 5 Eigenschaften existieren:

1) $x + y = y + x$ (kommutatives Gesetz der Addition).
2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (assoziatives Gesetz der Addition).
3) Zu je zwei Elementen x und y aus der Menge gibt es genau ein Element u, so daß $x + u = y$ (Umkehrbarkeit der Addition).
4) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (assoziatives Gesetz der Multiplikation).
5) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ und $(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$ (distributive Gesetze).

Das Kommutativgesetz für die Multiplikation muß nicht unbedingt erfüllt sein. Gilt das kommutative Gesetz auch für die zweite Verknüpfung, so heißt der Ring kommutativ. Grob gesagt ist ein Ring also ein Zahlbereich, in dem man unbeschränkt addieren, subtrahieren und multiplizieren kann; die uneingeschränkte Division ist in einem Ring im allgemeinen nicht möglich.

Ist die Division (für alle Elemente $x \neq 0$) stets möglich, so bezeichnet man einen kommutativen Ring als Körper, genauer als algebraischen Körper.

Damit ist ein Überblick über die wichtigsten Strukturbegriffe, soweit sie im Schulbereich vorkommen, gegeben. Für die Begriffe Verband, Ring und Körper lassen sich Beispiele am Rechenstab nur sehr umständlich konstruieren. Das Vorhaben, die Begriffe zu „veranschaulichen", läßt sich nicht in einfacher Weise lösen, da schon die Darstellung der Addition nur nach entsprechenden Umformungen möglich ist.

SI-Einheiten

Nur wenig beachtet wurde bisher auf dem Schulsektor das im Bundesgesetzblatt I (1969, S. 709 ff.) veröffentlichte „Gesetz über Einheiten im Meßwesen" vom 2. Juli 1969, das den Beitritt der BRD zum Internationalen Einheitensystem enthält und ein Jahr nach Verkündigung, also am 5. Juli 1970, in Kraft trat.

Das Gesetz erhielt die erläuternden Einzelheiten durch die „Ausführungsverordnung zum Gesetz über Einheiten im Meßwesen" vom 26. Juni 1970 (Bundesgesetzblatt I, 1970, S. 981 ff.).

Im geschäftlichen Verkehr sind die Größen im Sinne des Gesetzes über Einheiten im Meßwesen zu verwenden. Wer dagegen verstößt, begeht eine Ordnungswidrigkeit. Nur noch bis Ende 1974 bzw. 1977 sind einige der heute in Schulbüchern hauptsächlich verwendeten Einheiten zugelassen.

Im Laufe der Physikgeschichte wurden mehrere verschiedene Einheitensysteme entwickelt und verwendet. Auf der Grundlage eines dieser Systeme, des Giorgischen Systems, beschloß die 10. Generalkonferenz für Maß und Gewicht 1954 ein Einheitensystem mit den 6 Grundeinheiten Meter, Kilogramm, Sekunde, Ampere, Kelvin und Candela, den zwei Ergänzungseinheiten Radiant und Steradiant sowie 27 abgeleiteten kohärenten Einheiten. Dieses MKSAKC-System erhielt 1960 auf der 11. Generalkonferenz den Namen „Système International d'Unités", kurz SI. Dieses Internationale Maßsystem gilt nun auch bei uns verbindlich.

Die sechs Basiseinheiten sind

a) für die Länge das Meter (Kurzzeichen: m), festgelegt als Vielfaches einer bestimmten Lichtwellenlänge;

b) für die Masse das Kilogramm (Kurzzeichen: kg), bestimmt durch die Masse des Internationalen Kilogrammprototyps;

c) für die Zeit die Sekunde (Kurzzeichen: s) als Vielfaches einer bestimmten Periodendauer;

d) für die elektrische Stromstärke das Ampere (Kurzzeichen: A) als Stärke eines Stromes unter bestimmten Bedingungen;

e) für die thermodynamische Temperatur das Kelvin (Kurzzeichen: K), definiert als 273,16ter Teil der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunktes des Wassers;

f) für die Lichtstärke Candela (Kurzzeichen: cd).

Von diesen Basiseinheiten werden nun abgeleitete SI-Einheiten gebildet. Zur Bildung sind Produkte oder Quotienten mit dem Faktor 1 zugelassen, d. h. es werden sogenannte kohärente Einheiten gebildet. (Abgeleitete Einheiten, in denen andere Faktoren auftreten, werden als inkohärent bezeichnet; eines der bekanntesten Beispiele ist das Kilopond, 1 kp = 9,80665 N.)

So ist abgeleitete SI-Einheit für die Fläche das Quadratmeter oder Meterquadrat (m^2), definiert gleich der Fläche eines Quadrates von der Seitenlänge 1 m; für das Volumen das Kubikmeter (m^3), gleich dem Volumen eines Würfels von der Kantenlänge 1 m. Die heute noch in manchen Volksschulvorschriften ausdrücklich vorgeschriebenen Abkürzungen qm, qkm, qdm, qcm, qmm, cbm, cdm, ccm, usw. dürfen nur noch bis zum 31. Dezember 1974 verwendet werden.

Es würde zu weit führen, die abgeleiteten Einheiten aufzuführen. Interessierte Kollegen können sie u. a. im Bundesgesetzblatt I, Nr. 62/1970 nachschlagen. Verwendet werden dürfen außer den in der schon erwähnten Verordnung festgesetzten Namen und Einheitenzeichen für abgeleitete Einheiten, die als Potenzen oder Produkte von Potenzen aus anderen Einheiten abgeleitet sind, auch die die Potenzen oder Produkte von Potenzen ausdrückenden Benennungen und Einheitenzeichen, also milli- . . . , kilo- . . . usw.

Abgeleitete Einheiten der Zeit sind die Minute (Einheitenzeichen: min), die Stunde (Einheitenzeichen: h), der Tag (Einheitenzeichen: d).

„Neu" ist die Verwendung der abgeleiteten SI-Einheit der Kraft, das Newton (Einheitenzeichen: N). Definiert ist es gleich der Kraft, die einem Körper der Masse 1 kg die Beschleunigung 1 m/s^2 erteilt. Die Einheiten Pond und Dyn dürfen nach den Übergangsvorschriften noch bis 31. Dezember 1977 verwendet werden, ebenso wie beispielsweise

Ångström (Å), technische Atmosphäre (at), physikalische Atmosphäre (atm), Torr, mWS, Erg, Pferdestärke (PS) u. a., darunter auch die Kalorie (cal).

Für Energie, Arbeit und Wärmemenge wird einheitlich die abgeleitete SI-Einheit Joule (Einheitenzeichen: J) verwendet. Definiert ist 1 Joule gleich der Arbeit, die verrichtet wird, wenn der Angriffspunkt der Kraft 1 N in Richtung der Kraft um 1 m verschoben wird. Abgeleitete SI-Einheit der Leistung, des Energiestroms und des Wärmestroms ist das Watt (Einheitenzeichen: W).

§ 36 der Verordnung legt über die Temperatur fest, daß besonderer Name für das Kelvin nach § 3 des Gesetzes über Einheiten im Meßwesen bei der Angabe von Celsius-Temperaturen der Grad Celsius (Einheitenzeichen: °C) ist. Die bisher gebrauchte Angabe „Grad" (grd) ist nur noch bis 31. 12. 1974 gestattet.

Für einige Leser dürfte die abgeleitete SI-Einheit des Druckes oder der mechanischen Spannung, das Pascal (Einheitenzeichen: Pa), neu sein. Definiert ist es gleich dem auf eine Fläche gleichmäßig wirkenden Druck, bei dem senkrecht auf die Fläche 1 m^2 die Kraft 1 N ausgeübt wird. Besonderer Name für den zehnten Teil des Megapascal (MPa) ist das Bar (Einheitenzeichen: bar). Auf die bis Ende 1977 beschränkte Verwendung von at, atm, atü usw. haben wir bereits hingewiesen.

Die Verwendung der nunmehr gesetzlich vorgeschriebenen kohärenten Einheiten bringt mancherlei Vorteile und läßt manche den Schülern bisher etwas unverständliche Einheitenerklärung und unbequeme Umrechnung durchsichtig werden. Die Schüler müssen die „neuen" Einheiten benützen, wenn sie die Schule verlassen; es wird an den Lehrern liegen, so bald wie möglich nur noch die neuen Einheiten zu verwenden und die Vermittlung der geltenden Einheiten als grundlegende Aufgabe zu betrachten.

*

In der vorliegenden Darstellung mußten manche Dinge ausgespart bleiben, beispielsweise das interessante Gebiet der Ähnlichkeitsabbildungen, die eine Ausweitung der Einsatzmöglichkeiten des Rechenstabes auf die Geometrie gestatten.

Auch bei den Bezeichnungsweisen wurde auf die Erörterung von Feinheiten verzichtet. Wir haben, wie in der heutigen Mathematik üblich, die Begriffe „Abbildung" und „Funktion" synonym verwendet. Ein „Wörterbuch" läßt sich leicht aufstellen, das außer den Begriffen Funktion und Abbildung auch die andere Terminologie zuordnet, also Definitionsbereich und Urbildmenge, Wertebereich und Bildmenge, Argumentwert und Urbild, Funktionswert und Bild gleichbedeutend verwendet.